システム工学講義資料 藤本康孝

線形計画法の例題

1 問題

あるレストランで，手持ちの材料からハンバーグとオムレツを作って利益を最大にしたいと考えている．手持ちの材料は,

- ひき肉 3800 [g]
- タマネギ 2100 [g]
- ケチャップ 1200 [g]

であり，それぞれの品を作るのに必要な材料の量は,

- ハンバーグ 1 個あたり，ひき肉 60 [g]，タマネギ 20 [g]，ケチャップ 20 [g]
- オムレツ 1 個あたり， ひき肉 40 [g]，タマネギ 30 [g]，ケチャップ 10 [g]

であるとする．(他に必要な材料は十分な量があるものとする)
販売価格は,

- ハンバーグ 400 [円/個]
- オムレツ 300 [円/個]

とする．総売上を最大にするには，それぞれハンバーグとオムレツを幾つずつ作れば良いか?

2 解答例

この問題は x_1 をハンバーグの個数，x_2 をオムレツの個数として，次式のように定式化できる．

$$\text{最小化} \qquad z = -400x_1 - 300x_2 \tag{1}$$

$$\text{制約条件} \quad \begin{cases} 60x_1 + 40x_2 \leq 3800 & \text{ひき肉の制約式} \\ 20x_1 + 30x_2 \leq 2100 & \text{タマネギの制約式} \\ 20x_1 + 10x_2 \leq 1200 & \text{ケチャップの制約式} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \tag{2}$$

ただし，z は 売り上げ $\times -1$ を表す．
スラック変数を導入すると,

$$\text{最小化} \qquad z = -400x_1 - 300x_2 \tag{3}$$

$$\text{制約条件} \quad \begin{cases} 60x_1 + 40x_2 + y_1 = 3800 & \text{ひき肉の関係式} \\ 20x_1 + 30x_2 + y_2 = 2100 & \text{タマネギの関係式} \\ 20x_1 + 10x_2 + y_3 = 1200 & \text{ケチャップの関係式} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{cases} \tag{4}$$

スラック変数の物理的な意味は,

- y_1: ひき肉の残量
- y_2: タマネギの残量
- y_3: ケチャップの残量

になる．

ステップ１　まず，初期解 $x_1 = x_2 = 0$ からスタートする．このとき，$z = 0$, $y_1 = 3800$, $y_2 = 2100$, $y_3 = 1200$ である．(基底変数：(z), y_1, y_2, y_3，非基底変数：x_1, x_2)

$$
\left.
\begin{array}{lllllllll}
(z+) & \underline{400}x_1 & +300x_2 & & & = & 0 & \text{売り上げの関係式} & \text{(5a)} \\
 & 60x_1 & +40x_2 & +y_1 & & = & 3800 & \text{ひき肉の関係式} & \text{(5b)} \\
 & 20x_1 & +30x_2 & +y_2 & & = & 2100 & \text{タマネギの関係式} & \text{(5c)} \\
 & 20x_1 & +10x_2 & & +y_3 & = & 1200 & \text{ケチャップの関係式} & \text{(5d)}
\end{array}
\right. \quad (5)
$$

ここで，x_1 と x_2 のどちらを増やせば z をより小さくできるか考える．すなわち，まずハンバーグとオムレツのどちらかを一方を作ることにして，どちらを作るとより利益が上がるかを考える．ハンバーグの値段 400 円 > オムレツの値段 300 円 なので，ハンバーグを作ることにする．

ステップ２　まずハンバーグを作ることにしたが，材料には限りがある．最大で幾つのハンバーグを作ることができるかは，以下のように判断できる．いま，基底変数 y_1, y_2, y_3 は非零の正の値を持っている．ハンバーグの個数 x_1 を徐々に増やしていくと，材料の残量 y_1, y_2, y_3 は徐々に減っていく．このとき他の非基底変数 (いまの場合 x_2) は固定しておく．最初に残量が零になって材料が尽きるのはどの材料か?

材料をハンバーグの個数に換算すると，

- ひき肉 ((5b) から): $3800 \div 60 = 63 + \frac{1}{3}$ [個分]
- タマネギ ((5c) から): $2100 \div 20 = 105$ [個分]
- ケチャップ ((5d) から): $1200 \div 20 = 60$ [個分]

$60 < 63.333 < 105$ であるから，最初に材料が尽きるのはケチャップである．(**ケチャップを使い切る．**$y_3 = 0$) オムレツの個数を $x_2 = 0$ と固定したとき，次図のように縦軸 x_1 の値を (5) の関係式を満たしながら徐々に増加させていくと，矢印のように x_1 と y_1, y_2, y_3 の値は変化していく．そのうち，最初に零になるのは y_3 である．

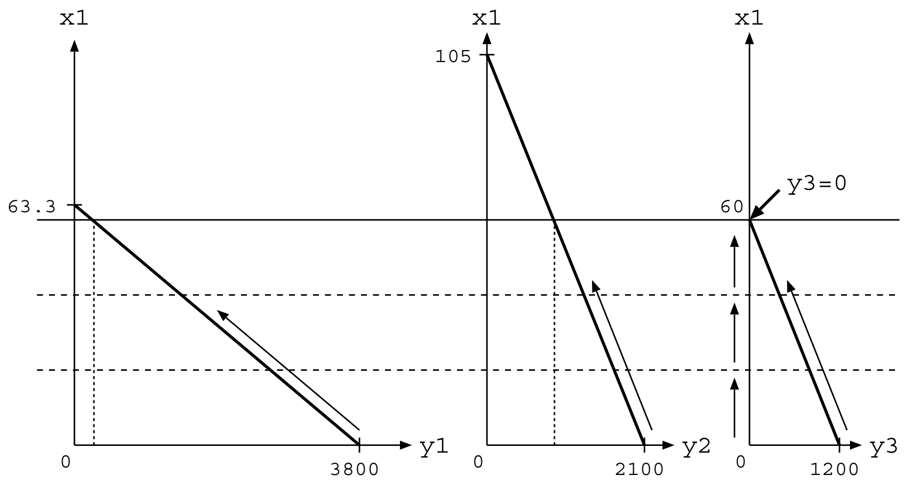

図 1: ステップ 2 におけるハンバーグの生産個数 x_1 と材料の残量 y_1,y_2,y_3 の関係

これまで非基底変数 (零の変数) だった x_1 は基底変数 (非零の変数) に，基底変数 (非零の変数) だった y_3 は非基底変数 (零の変数) になる．この x_1 と y_3 の値の変化によって，その他の非零の基底変数であるひき肉の残量 y_1 とタマネギの残量 y_2 はどのように変化したのだろうか? それには x_1, y_1, y_2, (z) について (5) 式を解けばよい．ただし，変数の右辺への移項はせずに，それぞれの

式に基底変数が一つずつ含まれ，かつ，その係数が 1 となれば十分である．つまり，新しい非基底変数 x_1 をケチャップの関係式以外の式から消去すればよい．(掃き出し計算)

具体的には，次式のようになる．

$$\begin{array}{rrrrrrcll} (5a)-20\times(5d) & (z+) & 100x_2 & & & -20y_3 & = & -24000 & \text{売り上げ} & (6a) \\ (5b)-3\times(5d) & & 10x_2 & +y_1 & & -3y_3 & = & 200 & \text{ひき肉} & (6b) \\ (5c)-(5d) & & 20x_2 & & +y_2 & -y_3 & = & 900 & \text{タマネギ} & (6c) \\ (5d)\div 20 & x_1 & +\frac{1}{2}x_2 & & & +\frac{1}{20}y_3 & = & 60 & \text{ハンバーグ} & (6d) \end{array} \quad (6)$$

このとき，ハンバーグの個数 x_1, ひき肉の残量 y_1, タマネギの残量 y_2，および，売り上げ z は，非基底変数 $x_2 = y_3 = 0$ とすることで直ちに求まる．(右辺の値がそのままその値となっている)

- 非基底変数 (値が零): オムレツの個数 $x_2 = 0$, ケチャップの残量 $y_3 = 0$
- 基底変数 (値が非零):
  売り上げ $z = -24000$ [円]
  ひき肉の残量 $y_1 = 200$ [g]
  タマネギの残量 $y_2 = 900$ [g]
  ハンバーグの個数 $x_1 = 60$ [個]

ステップ 3　つぎに，(6a) に注目して，z の値をもっと小さくすることを考える．動かせる変数は x_2(オムレツの個数) と y_3(ケチャップの残量) である．係数を比較すると $100 > -20$ である．つまり，x_2(オムレツの個数) を増加させると売上が (効率的に) 増加することが分かる．(y_3 の係数はマイナスなので y_3 を増加させると売上が減少してしまう．つまり，ケチャップの残量を増やすことは意味がない．)

そこで，今度はオムレツを作ることを考える．オムレツがどれだけ作れるかは，ステップ 2 の場合と同様に，それぞれの材料の残量と消費量から求める．計算はステップ 2 の場合と同様に，材料をオムレツの個数に換算すると，

- ひき肉 ((6b) から): $200 \div 10 = 20$ [個分]
- タマネギ ((6c) から): $900 \div 20 = 45$ [個分]
- ハンバーグ ((6d) から): $60 \div \frac{1}{2} = 120$ [個分]

$20 < 45 < 120$ であるから，最初に材料が尽きるのはひき肉である．(**ひき肉を使い切る．** $y_1 = 0$)
(注) ここではハンバーグをオムレツのケチャップ材料源と考えている．

解釈はやや複雑である．(6b) を見ると，オムレツ 1 個当たり 10[g] のひき肉を消費することを表現しているように見える．もともと，オムレツ 1 個当たり 40[g] のひき肉を消費するはずだった．これはどういうわけだろうか? この $200 \div 10 = 20$ という計算は (6b) において，x_2 以外の基底変数 (この場合 y_3) を零に固定したまま，オムレツの個数 x_2 とひき肉の残量 y_1 を変化させていることに相当する．ケチャップの残量 $y_3 = 0$ に固定するということは，ハンバーグに利用する予定だったケチャップをオムレツに流用するということである．つまり，オムレツの個数 x_2 を増加させると，$y_3 = 0$ を保ちながら自動的に x_1 が減少することを意味する．このとき，ハンバーグに利用する予定だったひき肉も流用できる．オムレツのケチャップ消費量はハンバーグのケチャップ消費量の 1/2 だから，流用できるひき肉の量はハンバーグ 1/2 個分，つまり，$60 \div 2 = 30$[g] である．オムレツ 1 個当たりに必要なひき肉の量は 40[g] だったから，あと 10[g] 必要である．これが，(6b) の x_2 の係数に現れている．先にステップ 2 で掃き出し計算をしたことによって，(6b) には，このことが既に折り込み済みとなっているのである．(6c) についても同様である．

つぎに，ステップ 2 と同様に掃き出し計算を行なう．(6b) の x_2 を軸に掃き出すと，次式のようになる．

$$
\begin{array}{rlrrrrcll}
(6a) - 10 \times (6b) & (z+) & & & -10y_1 & & +10y_3 = & -26000 & \text{売り上げ} & (7a) \\
(6b) \div 10 & & & x_2 & +\frac{1}{10}y_1 & & -\frac{3}{10}y_3 = & 20 & \text{オムレツ} & (7b) \\
(6c) - 2 \times (6b) & & & & -2y_1 & +y_2 & +5y_3 = & 500 & \text{タマネギ} & (7c) \\
(6d) - \frac{1}{20} \times (6b) & & x_1 & & -\frac{1}{20}y_1 & & +\frac{1}{5}y_3 = & 50 & \text{ハンバーグ} & (7d)
\end{array}
\tag{7}
$$

このとき，ハンバーグの個数 x_1, オムレツの個数 x_2, タマネギの残量 y_2，および，売り上げ z は，非基底変数 $y_1 = y_3 = 0$ とすることで直ちに求まる．(右辺の値がそのままその値となっている)

- 非基底変数 (値が零): ひき肉の残量 $y_1 = 0$, ケチャップの残量 $y_3 = 0$
- 基底変数 (値が非零):
  売り上げ $z = -26000$ [円]
  オムレツの個数 $x_2 = 20$ [個]
  タマネギの残量 $y_2 = 500$ [g]
  ハンバーグの個数 $x_1 = 50$ [個]

ステップ 4　つぎに，(7a) に注目して，z の値をもっと小さくすることを考える．動かせる変数は y_1(ひき肉の残量) と y_3(ケチャップの残量) である．係数を比較すると $10 > -10$ である．つまり，y_3(ケチャップの残量) を増加させることで売上増加につながることが分かる．

実は，スラック変数を導入して (4) の標準形に変形した段階で，状態変数 x とスラック変数 y は式の上では全く区別なく扱うことが可能となる．したがって，ここでも y_3 を普通の変数と考え，これまでのステップ 2，ステップ 3 と同様に計算を進める．

ひき肉の残量 y_1 を零にしたまま，ケチャップの残量 y_3 を増加させる．材料をケチャップのグラム数に換算すると，

- オムレツ ((7b) から): y_3 の係数 $-\frac{3}{10} < 0$ なので y_3 をいくら増やしても大丈夫
- タマネギ ((7c) から): $500 \div 5 = 100$ [g]
- ハンバーグ ((7d) から): $50 \div \frac{1}{5} = 250$ [g]

$100 < 250$ であるから，最初に材料が尽きるのはタマネギである．(**タマネギを使い切る．** $y_2 = 0$)
そこで，ステップ 2,3 と同様に掃き出し計算を行なう．(7c) の y_3 を軸に掃き出すと，次式のようになる．

$$
\begin{array}{rlrrrrrcll}
(7a) - 2 \times (7c) & (z+) & & & -6y_1 & -2y_2 & & = & -27000 & \text{売り上げ} & (8a) \\
(7b) + \frac{3}{50} \times (7c) & & & x_2 & -\frac{1}{50}y_1 & +\frac{3}{50}y_2 & & = & 50 & \text{オムレツ} & (8b) \\
(7c) \div 5 & & & & -\frac{2}{5}y_1 & +\frac{1}{5}y_2 & +y_3 & = & 100 & \text{ケチャップ} & (8c) \\
(7d) - \frac{1}{25} \times (7c) & & x_1 & & +\frac{3}{100}y_1 & -\frac{1}{25} & & = & 30 & \text{ハンバーグ} & (8d)
\end{array}
\tag{8}
$$

このとき，ハンバーグの個数 x_1, オムレツの個数 x_2, ケチャップの残量 y_3，および，売り上げ z は，非基底変数 $y_1 = y_2 = 0$ とすることで直ちに求まる．

- 非基底変数 (値が零): ひき肉の残量 $y_1 = 0$, タマネギの残量 $y_2 = 0$

- 基底変数 (値が非零):
  売り上げ $z = -27000$ [円]
  オムレツの個数 $x_2 = 50$ [個]
  ケチャップの残量 $y_3 = 100$ [g]
  ハンバーグの個数 $x_1 = 30$ [個]

ステップ 5　(8a) をみると，y_1 と y_2 のどちらを増加させても売上が減少してしまうので，ステップ 4 で求めた解が最適解である．

凸多面体上での解の動き　凸多面体上での解の動きを図解すると次図のようになる．

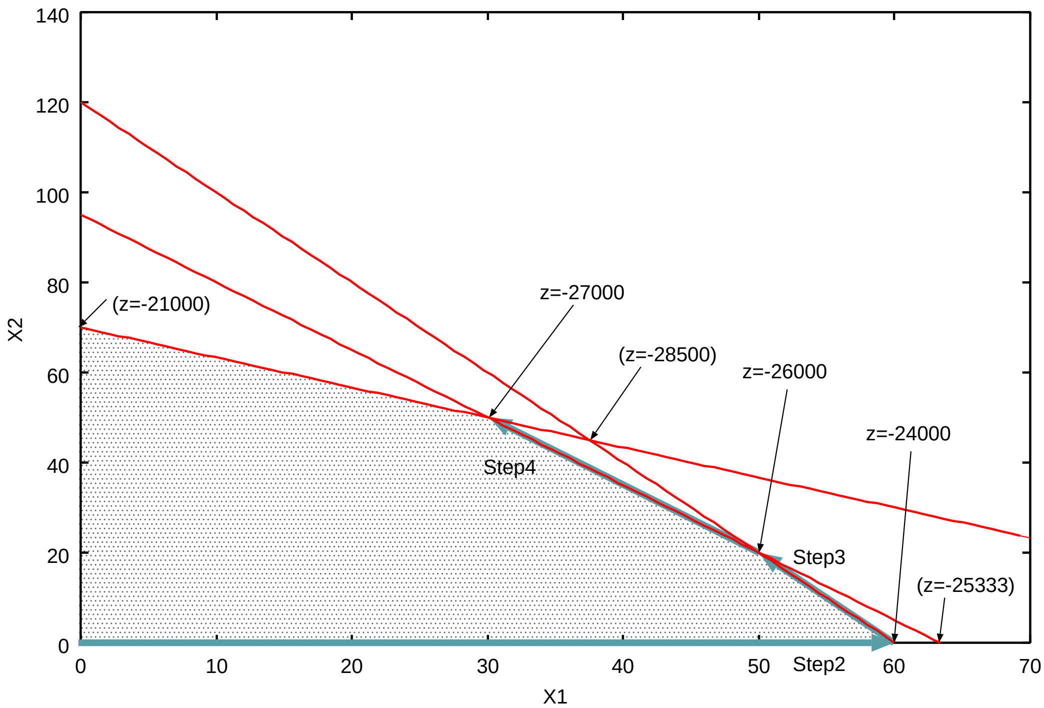

図 2: 凸多面体上での解の動き